Řešení příkladu číslo 6.:

Podle předpokladu platí $\sigma(T_n) \subseteq \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)^{\intercal}$. Máme tedy ověřenu adaptovanost procesu T_n na filtraci $\mathcal{F}_n$. Následně ověříme integrovatelnost procesu T_n. Zřejmě $T_n \geq 0$ platí P-skoro jistě a

$$\int T_n \,\mathrm{d}P = \int \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n}(X_1, \ldots, X_n) \,\mathrm{d}P = \int \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n} \,\mathrm{d}P_{X_1,\ldots,X_n} = \int \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n} \,\mathrm{d}\mu_n = \int \mathrm{d}\nu_n = 1 < \infty.$$

Nyní pro $n \in \mathbb{N}$ ověříme rovnost $E[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = T_n$ skoro jistě a to z definice podmíněné střední hodnoty. Buď $B \in \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Pak existuje $C \in \mathcal{S}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}_n$ taková, že $B = [(X_1, \ldots, X_n)^{\intercal} \in C]$. Pak

$$\int_B T_n \,\mathrm{d}P = \int_B \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n}(X_1, \ldots, X_n) \,\mathrm{d}P = \int_C \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n} \,\mathrm{d}\mu_n = \nu_n(C)$$

a podobně

$$\int_B T_{n+1} \,\mathrm{d}P = \int_B \tfrac{\mathrm{d}\nu_{n+1}}{\mathrm{d}\mu_{n+1}}(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \int_{C\times S_{n+1}} \tfrac{\mathrm{d}\nu_{n+1}}{\mathrm{d}\mu_{n+1}} \,\mathrm{d}\mu_{n+1} = \nu_{n+1}(C \times S_{n+1}) = \nu_n(C).$$

Z definice podmíněné střední hodnoty tak dostáváme rovnost $E[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = T_n$ skoro jistě, a tedy proces T_n je $\mathcal{F}_n$-martingal.

Alternativní řešení příkladu za dodatečného předpokladu, že veličiny $X_1, X_2, \ldots$ jsou regulárně závilsé:

V tomto případě lze k výpočtu podmíněné střední hodnoty použít podmíněnou hustotu. Nejprve si označíme referenční pravděpodobnostní míru, která tím pádem bude automaticky σ-konečná. Označme

$$\kappa_n = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}, \qquad \text{pak} \qquad \mu_n = P_{X_1,\ldots,X_n} \ll \kappa_n.$$

Protože $\nu_n \ll \mu_n \ll \kappa_n$, platí $\nu_n \ll \kappa_n$ a existují verze hustot

$$f_n = \tfrac{\mathrm{d}\mu_n}{\mathrm{d}\kappa_n} \quad \text{a} \quad g_n = \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu_n} \cdot \tfrac{\mathrm{d}\mu_n}{\mathrm{d}\kappa_n} = \tfrac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\kappa_n}$$

takové, že $g_n \cdot 1_{[f_n=0]} = 0$. Pokud by nám někdo zadal takové verze hustot, že platí rovnost $g_n \cdot 1_{[f_n=0]} = 0$ pouze skoro všude vzhledem k referenční míře, předefinujeme si tyto hustoty na množině míry nula tak, aby uvedená rovnost platila všude. V tomto případě lze psát

$$T_n = \frac{g_n(X_1, \ldots, X_n)}{f_n(X_1, \ldots, X_n)},$$

přičemž výše udená rovnost platí P-skoro jistě. Zřejmě $T_n \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$, neboť $\int |T_n| \,\mathrm{d}P = 1$. Přistoupíme tedy k výpočtu podmíněné střední hodnoty. Pro κ_n-skoro všechna x dostaneme, že

$$\begin{aligned}
E[T_{n+1}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] &= E[\tfrac{g_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1})}{f_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1})}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\
&= \int \tfrac{g_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\xi)}{f_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\xi)} \,\mathrm{d}P_{X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n}(\xi|x_1, \ldots, x_n) \\
&= \int \tfrac{g_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\xi)}{f_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\xi)} \tfrac{f_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\xi)}{f_n(x_1,\ldots,x_n)} \,\mathrm{d}P_{X_n}(\xi) \\
&= \tfrac{\int g_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\xi) \,\mathrm{d}P_{X_n}(\xi)}{f_n(x_1,\ldots,x_n)} = \tfrac{g_n(x_1,\ldots,x_n)}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}.
\end{aligned}$$

Pak tedy P-skoro jistě platí $E[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = T_n$, a tedy T_n je $\mathcal{F}_n$-martingal.

Ve výpočtu jsme používali konvenci "$\frac{0}{0} = 0$" a také jsme mlčky (implicitně) předpokládali, že máme takové verze hustot $f_n = \frac{\mathrm{d}\mu_n}{\mathrm{d}\kappa_n}$ a $f_{n+1} = \frac{\mathrm{d}\mu_{n+1}}{\mathrm{d}\kappa_{n+1}}$, že

$$f_n(x) = \int f_{n+1}(x, \xi) \,\mathrm{d}P_{X_{n+1}}(\xi) \quad \& \quad f_{n+1}(x, y) \cdot 1_{[f_n(x)=0]} = 0,$$

kdykoli $x \in S_1 \times \ldots \times S_n$ a $y \in S_{n+1}$.